1) (a) Geben Sie die Definition für die Konvergenz einer Reihe an und beweisen Sie den Satz, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur dann konvergieren kann, wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

(b) Schreiben Sie die folgenden Summen als Potenzreihen in der Variablen x und bestimmen Sie die zugehörigen Konvergenzradien.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{(n!)}, \qquad \sum_{n=0}^{100} (nx)^n$$

2) (a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i. Es gibt eine injektive, stetige Abbildung $f : (0,1) \to [0,1]$.
ii. Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $f : (0,1) \to [0,1]$.
iii. Es gibt keine bijektive, stetige Abbildung $f : (0,1) \to [0,1]$.

(b) Mit $[x]$ wird wie immer der ganze Teil der reellen Zahl x bezeichnet. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Z} \\ [x] & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ [1-x] & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Untersuchen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist.

3) (a) Geben Sie die Definition für die Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x_0 an und beweisen Sie den Satz, dass jede in x_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x^2)}{\log(2x)}, \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x}\right), \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x}$$

4) (a) Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

i. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade, integrierbare Funktion ist, dann gilt die Beziehung $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$ für alle positiven reellen Zahlen c.
ii. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade, integrierbare Funktion ist, dann gilt die Beziehung $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$ für alle positiven reellen Zahlen c.
iii. Wenn die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend ist, dann ist auch die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ monoton fallend.
iv. Wenn die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ monoton fallend ist, dann ist auch die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale. (Auch hier ist $[x]$ wieder der ganze Teil von x.)

$$\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{\sin(\log(x^3))}{x}\,dx, \qquad \int_1^e x^2 \log(x^2)\,dx, \qquad \int_c^{c+1} [x]\,dx \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$