Analysis I **SS07** **Shcherbina/Fischer**
1. Klausur **13. Juli 2007**

---

1) (a) Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

i. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

ii. Aus $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

iii. Aus $\limsup_{n\to\infty} a_n = c < 0$ folgt $\liminf_{n\to\infty}(1/a_n) = 1/c$.

iv. Aus $\liminf_{n\to\infty} a_n = c < 0$ folgt $\limsup_{n\to\infty}(1/a_n) = 1/c$.

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n^2)} n^{-\frac{1}{2}}$$

2) (a) Gegeben seien die Funktionen $f_i : [0,1) \cup (1,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}, \qquad f_3(x) = (x-1)^2$$

Untersuchen Sie die Funktionen f_1, f_2 und f_3 in ihrem Definitionsbereich auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

(b) Gegeben seien ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und eine stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$. Zeigen Sie, dass es in dem Intervall $[a,b]$ mindestens eine reelle Zahl x gibt, für die die Beziehung $f(x) = x$ gilt.

3) (a) Geben Sie die Definition eines lokalen Minimums an und beweisen Sie den Satz, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ in x ein lokales Minimum hat.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x^3 \log(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Bestimmen Sie Anzahl und Typ der lokalen Extrema dieser Funktion. Sie brauchen die genaue Lage der Extrema nicht anzugeben.

4) (a) Geben Sie die Definition einer Stammfunktion an und beweisen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_{\log \pi}^{\log(2\pi)} e^x \sin(e^x)\, dx, \qquad \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{[2^n x]}{2^n}\, dx,\ n \in \mathbb{N}$$

Dabei wird mit $[x]$ wie immer der ganze Teil der reellen Zahl x bezeichnet.