Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal Bergische Universität Wuppertal
04.02.2011

Klausur Analysis I (WS 2010/2011)

mit Lösungen

Aufgabe 1. (4+4+4+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k-1}$.

b) Überprüfen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3 2^n}{n!}$ auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=7}^{\infty}4k^5 3^k x^{k^2}$.

d) Geben Sie eine konvergente Reihe an, die nicht absolut konvergiert.

Lösung.
a) Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 1 = \frac{1}{1-2/3} - 1 = 2.$$

b) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3 2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n+1}\right| = 0.$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

c) Konvergenzradius $= 1$ mit Cauchy-Hadamard:

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k^2]{4}\cdot\left(\sqrt[k^2]{k}\right)^5\cdot\sqrt[k]{3} = 1.$$

d) Zum Beispiel die alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Aufgabe 2. (9+4+8 Punkte)

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als $g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 0, \\ \exp(x\log(x)) & \text{für } x > 0. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass g stetig aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion g (Beweis!).

Lösung:

a) Für $x \neq 0$ ist g als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und daher auch stetig.

Um Stetigkeit im Punkt 0 zu untersuchen, betrachten wir zunächst mit l'Hospital unter Klärung der Voraussetzungen! (i.e. $\lim_{x\searrow 0} -\log x = \infty = \lim_{x\searrow 0} 1/x$):

$$\lim_{x\searrow 0} x\log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\searrow 0} -x = 0.$$

Somit ist g ist auch im Punkt 0 stetig, denn

$$\begin{aligned} \lim_{x\nearrow 0} g(x) &= 1, \\ \lim_{x\searrow 0} g(x) &= \lim_{x\searrow 0} \exp(-x) = 1. \end{aligned}$$

Für Differenzierbarkeit reicht es nicht, stetig differenzierbar zu überprüfen! Wir müssen den Differenzenquotienten ansetzten und wieder mit der Regel von l'Hospital den richtigen Grenzwert betrachten. Da dieser nicht existiert ist g im Punkt 0 nicht differenzierbar:

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = \lim_{x\searrow 0} g'(x) = \lim_{x\searrow 0} \exp(x\log(x))\big(\log(x)+1\big),$$

existiert nicht wegen $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$.

b) Wegen $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ ist die Funktion g nach dem Zwischenwertsatz surjektiv.

c) Wir berechnen die Ableitungen für $x \neq 0$:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ \exp(x\log(x))\big(\log(x)+1\big) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \exp(x\log(x))\left(\big(\log(x)+1\big)^2 + \frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gibt es daher nach dem notwendigen und hinreichenden Kriterium für zweimal stetig differenzierbare Funktionen genau ein lokales Minimum bei $x = 1/e$:

Wegen $\exp(x \log(x)) > 0$ ist $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = -1 \Leftrightarrow x = \exp(-1)$ und ausserdem ist $g''(x) > 0$ für $x > 0$.

Darüber hinaus besitzt g ein lokales Maximum bei $x = 0$, denn...

es ist $g(0) = 1$ und...

$g(x) < 1$ für $x < 0$ und ...

$\exp(x \log(x)) < 1$ für $0 < x < 1$, denn...

$x \log(x) < 0$ für $0 < x < 1$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\log(x)$ in einem beliebigen Punkt $a > 0$ und berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

Lösung.
Ableitungen:

$$f(x) = \log(x),\ f'(x) = x^{-1},\ f''(x) = -x^{-2},\ f'''(x) = 2x^{-3},\ ...$$
$$\Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\ x^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Taylorreihe:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \log(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a^{-k}}{k}\ (x-a)^k.$$

Konvergenzradius mit Cauchy-Hadamard $= a$, denn

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{a \cdot \sqrt[k]{k}} = 1/a.$$

Aufgabe 4. (5+6 Punkte)

a) Berechnen Sie $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx$.

b) Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\ dx$?

Lösung.
a) Substitution $x = 2\sin(t)$, $dx = 2\cos(t)dt$:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\ dt$$

Partielle Integration mit $u = \sin(t)$, $u' = \cos(t)$, $v = \cos(t)$, $v' = -\sin(t)$:

$$\int_a^b \cos^2(t)\ dt = [\sin(t)\cos(t)]_a^b + \int_a^b \sin^2(t)dt = [\sin(t)\cos(t) + t]_a^b - \int_a^b \cos^2(t)dt,$$

unter Verwendung von $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Umstellen:

$$2\int_a^b \cos^2(t)dt = \big[\sin(t)\cos(t) + t\big]_a^b.$$

Damit ergibt sich:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\big[\sin(t)\cos(t) + t\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi.$$

b) Wegen $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ sind beide Grenzen kritisch und der Ausdruck in der Aufgabenstellung bedeutet:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)dx = \lim_{\delta\searrow-\pi/2}\int_{\delta}^{0} \tan(x)dx + \lim_{\delta\nearrow\pi/2}\int_0^{\delta} \tan(x)dx.$$

Da $\cos(x)$ im Integrationsbereich positiv ist können wir logarithmische Integration verwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx &= \big[\log(\cos(x))\big]_0^{\delta} = \log\cos(\delta),\\ \int_{-\delta}^{0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx &= \big[\log(\cos(x))\big]_{-\delta}^{0} = -\log\cos(-\delta).\end{aligned}$$

Beide Grenzwerte $\lim_{\delta\nearrow\pi/2}\log\cos(\delta)$ und $\lim_{\delta\searrow-\pi/2} -\log\cos(-\delta)$ exitieren nicht und damit existiert auch das uneigentliche Integral nicht.