Die arithmetisch-geometrische Mittel Ungleichung

Seien $a_1, \cdots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt $A(a_1, \cdots, a_n) \geq G(a_1, \cdots, a_n)$, wobei $A(a_1, \cdots, a_n) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ das arithmetische und $G(a_1, \cdots, a_n) := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$ das geometrische Mittel genannt werden. Dabei gilt die Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \cdots = a_n$ gilt.

Beweis (Ossa) Zeige $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} a_i$ per Induktion in $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$: klar.

$n = 2:$ $(\frac{1}{2}(a_1 + a_2))^2 - a_1 a_2 = \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 \geq 0$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2$

$n - 1 \mapsto n$: Sei im Folgenden wenigstens ein a_i von den anderen verschieden und ohne Einschränkung $a_1 = \min(a_1, \cdots, a_n)$ sowie $a_n = \max(a_1, \cdots, a_n)$. Setze $a := A(a_1, \cdots a_n)$, also gilt $a_1 < a < a_n$.

Sei $x := a_1 + a_n - a$. Dann ist $xa - a_1 a_n = a_1 a + a_n a - a^2 - a_1 a_n = a_1(a - a_n) + a(a_n - a) = (a_n - a)(a - a_1) > 0$ $(*)$. Ergo $xa > a_1 a_n$.

Definiere $b_1 := x$ und $b_j := a_j, \quad 2 < j < n$.

$$
\begin{aligned}
&a_1 \cdots a_n = a_1 a_n b_2 \cdots b_{n-1} < a x b_2 \cdots b_{n-1} = a b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \\
&\leq a \left(\frac{1}{n-1}(b_1 + \cdots + b_{n-1})\right)^{n-1} \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= a \left(\frac{1}{n-1}(a_1 + a_n - a + a_2 + \cdots + a_{n-1})\right)^{n-1} = a \left(\frac{1}{n-1}(a_1 + \cdots + a_n - a)\right)^{n-1} \\
&= a \left(\frac{1}{n-1}(na - a)\right)^{n-1} = a a^{n-1} = a^n
\end{aligned}
$$

Bemerkung Gilt $a_1 = \cdots = a_n$, so wird aus der Ungleichung $(*)$ eine Gleichheit. Dies hat zur Folge, dass $<$ und $\leq$ aus der Ungleichungskette zu $=$ werden. Damit erhält man die gewünschte Behauptung.

Folgerung aus der AGM-Ungleichung

Sind $a_1, \cdots, a_n$ vorgegebene und $b_1, \cdots, b_n$ beliebige positive Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$, so gilt:

$$a_1 = \cdots = a_n \iff \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \prod_{i=1}^{n} b_i$$

Gilt $b_i \neq b_j$ für ein i und ein j, so folgt $\prod_{i=1}^{n} a_i > \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Bemerkung Die Äquivalenz ist so zu verstehen, dass die b_i beliebig sind unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Sind also nicht alle a_i gleich, so gibt es b_i mit $\prod_{i=1}^{n} a_i < \prod_{i=1}^{n} b_i$

Der Beweis findet sich beispielsweise in Walter, Analysis I, S. 47/48.