Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $f(x) = x \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ im Punkt 0 stetig aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha > 1$ die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x = 0$ und $g(x) = x^\alpha \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ im Punkt 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist f gerade und differenzierbar, so ist die Ableitung f' ungerade.

b) Ist f ungerade und differenzierbar, so ist die Ableitung f' gerade.

c) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion h dargestellt werden.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine positive reelle Konstante $a > 0$. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, die wie folgt gegeben sind.

$$f_1(x) = x^{(x^x)}, \quad f_2(x) = (x^x)^x, \quad f_3(x) = x^{(x^a)}, \quad f_4(x) = x^{(a^x)}, \quad f_5(x) = a^{(x^x)}$$

Aufgabe 4. Gegeben sei die Polynomfunktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$P(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

a) Zeigen Sie, dass die k-te Ableitung dieser Funktion der folgenden Beziehung genügt.

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k}$$

b) Zeigen Sie, dass die Polynomfunktion P genau dann gerade beziehungsweise ungerade ist, wenn alle ungeraden Koeffizienten a_{2l+1} beziehungsweise alle geraden Koeffizienten a_{2l} verschwinden.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 22.12.2010, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.