Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Das Bild jeder offenen Menge ist wieder offen.

b) Das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen.

c) Das Bild jeder kompakten Menge ist wieder kompakt.

d) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen.

e) Das Urbild jeder kompakten Menge ist wieder kompakt.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

a) $f_1 : (0, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = (x + 2)/(x^2 - 4)$

b) $f_2 : (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = [x]$

c) $f_3 : (0, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x < 1, \\ x^2 & \text{für} \quad x \geq 1. \end{cases}$

d) $f_4 : (0, 2) \to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x < 1, \\ 3 - x & \text{für} \quad x \geq 1. \end{cases}$

Aufgabe 3.

i. Gegeben sei eine positive reelle Zahl a. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp_a(x) = \exp(x \cdot \log a)$ ist stetig.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp_a(n) = a^n$.

(d) Für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$.

ii. Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := \exp_a(x)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(b) Für alle $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{(xy)}$.

(c) Für alle $a, b > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

(d) Für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $(1/a)^x = a^{-x}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Gegeben seien ein $k \in \mathbb{N}$ und eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen.

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} x^k e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \log x = \infty, \quad \lim_{x\searrow 0} \log x = -\infty,$$
$$\lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} x^{-\alpha} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\searrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 15.12.2010, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.