Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Gegeben seien zwei zusammenhängende Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ dann ebenfalls zusammenhängend ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Für eine Teilmenge $M \subseteq D$ definieren wir das Bild von M unter f durch $f(M) := \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in M : f(x) = y\}$.

a) Beweisen Sie die Beziehung

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

b) Beweisen Sie die Beziehung

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

c) Konstruieren Sie ein Beispiel mit

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Aufgabe 3.

a) Wir definieren die folgenden beiden Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}{}^{*} f(x) = c \quad &:\Longleftrightarrow \quad \Big(\forall\, (x_n)_n : \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c\Big) \\ \lim_{x\to a}{}^{**} f(x) = c \quad &:\Longleftrightarrow \quad (\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Aussagen $\lim_{x\to a}{}^{*} f(x) = c$ und $\lim_{x\to a}{}^{**} f(x) = c$ äquivalent sind und wir deshalb für beide Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x) = c$ schreiben können.

b) Wir sagen, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in einem Punkt $a \in D$ $*$-stetig, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für jede Folge $(x_n)_n$ aus D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Wir sagen, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in einem Punkt $a \in D$ $**$-stetig, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Beziehung $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt. Zeigen Sie, dass eine Funktion f in einem Punkt a genau dann $*$-stetig ist, wenn sie $**$-stetig ist.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } \ x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{für } \ x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} - \{0\},\ m \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}\,(n,m) = 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 08.12.2010, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.