Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen in den Randpunkten.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 23 \cdot n^4 x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k^2)}}{3^k}$

Aufgabe 2.

a) Gegeben sei die Menge $G := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Untersuchen Sie, ob diese Menge offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

b) Gegeben sei die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ relativ offen ist.

c) Gegeben sei die Menge G wie in (a) als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine Teilmenge $T \subseteq G$, die nicht in G relativ offen ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es sei J eine Menge, und jedem $j \in J$ sei eine kompakte Menge $K_j \subset \mathbb{R}$ zugeordnet. Dann ist die Menge $K := \bigcap_{j\in J} K_j$ ebenfalls kompakt.
2. Es sei M eine endliche Menge, und jedem $j \in M$ sei eine kompakte Menge $K_j \subset \mathbb{R}$ zugeordnet. Dann ist die Menge $K := \bigcup_{j\in M} K_j$ ebenfalls kompakt.
3. Es gibt eine (unendliche) Familie kompakter Mengen, so dass $K := \bigcup_{j\in J} K_j$ nicht mehr kompakt ist.

Aufgabe 4. Die folgenden Mengen sind nicht kompakt.

$$A := [0, \infty), \qquad B := [0, 1), \qquad C := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

Geben Sie für jede dieser Mengen eine offene Überdeckung an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 01.12.2010, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.