Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Supremum und das Infimum. Stellen Sie fest, ob das Supremum und das Infimum zur angegebenen Menge gehören oder nicht.

a) $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| < 1\right\}$

b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} - 1 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$

c) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{n}\right| < \frac{2}{n}\right\}$

Aufgabe 2.

a) Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$, deren Limes superior jeweils eine endliche Zahl ist. Beweisen Sie, dass dann immer die folgende Beziehung gilt.

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

b) Konstruieren Sie zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$, deren Limes superior jeweils eine endliche Zahl ist, so dass die folgende Beziehung gilt.

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) < \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Aufgabe 3.

a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge und $a := \sup(M)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen von M mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

b) Sei $(f_n)_n$ eine beschränkte, $(g_n)_n$ eine positive konvergente Folge. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(f_n g_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} f_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} g_n\big).$$

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar sind, indem Sie analog zum Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ vorgehen (Stichwort: Diagonalfolge).

b) Zeigen Sie: die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen $M_k, k \in \mathbb{N}$, ist wieder abzählbar, indem Sie das Prinzip aus Teil a) übertragen.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 24.11.2010, 10 Uhr,** in das Postfach einer Ihrer Übungsgruppen auf Flur D.13 erfolgen.