Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Gegeben sei die Folge $(f_n)_n$ der Fibonacci-Zahlen durch $f_1 := 1$, $f_2 := 1$ und $f_n := f_{n-2} + f_{n-1}$ für alle $n \geq 3$.

a) Zeigen Sie, dass alle Fibonacci-Zahlen der Abschätzung $f_n \geq n-1$ genügen.

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die folgende Beziehung gilt:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(g_n)_{n\geq 2}$ mit

$$g_n := \frac{f_{n+1}f_{n-1}}{f_n^2}$$

den Grenzwert 1 hat.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie ihre Grenzwerte.

$$a_n := \frac{2n+3}{4n} \qquad b_n := \frac{3n}{n^2} \qquad c_n := \frac{n^3}{2^n} \qquad d_n := \frac{3^n}{n!} \qquad e_n := \frac{2+n-n^2}{5-2n+3n^2}$$

Aufgabe 3. Konstruieren Sie reelle Zahlenfolgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so dass die folgenden vier Fälle eintreten:

1. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.
2. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$.
3. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$ für eine vorgegebene reelle Zahl c.
4. Die Folge $(a_n b_n)_n$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

Aufgabe 4. Es sei $(f_n)_n$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $(g_n)_n$ mit

$$g_n := \frac{f_1 + f_2 + ... + f_n}{n}$$

eine Nullfolge ist.

Wichtige Hinweise: Die Abgabe soll in 3er Gruppen erfolgen. Die Partner eines solchen Teams müssen nicht in der selben Übungsgruppe sein! Tackern Sie Ihre Abgabe zusammen, und vergessen Sie nicht Ihre Namen, Matrikelnummern **und Übungsgruppe** auf der ersten Seite zu vermerken.

Beweisen Sie stets alle Ihre Behauptungen detailliert!

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 10.11.2010, 10 Uhr,** in das Postfach einer Ihrer Übungsgruppen auf Flur D.13 erfolgen.