

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Beweisen Sie für reelle Zahlen a, b, c die Aussagen:

a)

$$|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|.$$

b)

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|.$$

Wann gilt Gleichheit? (Beweis!)

Aufgabe 2. Leiten Sie folgende Aussagen aus den Axiomen der reellen Zahlen ab:

$$(2.11) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$$

$$(2.12) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$$(2.13) \quad \forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$$

$$(2.14) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$(2.15) \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$$

$$(2.16) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

$$(2.17) \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall n, m \in \mathbb{N} : x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$(2.18) \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall n, m \in \mathbb{N} : (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$(2.19) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie: für reelle Zahlen x und y gelten die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \max(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{und} \\ \min(x, y) &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|). \end{aligned}$$

b) Gegeben seien zwei positive reelle Zahlen a und b , sowie zwei reelle Zahlen x und y mit $|x| < a$ und $|y| > b$. Finden Sie Abschätzungen für $|x - y|$ und $|x/y|$ in Abhängigkeit von a und b .

Aufgabe 4. Wir nennen eine reelle Zahl irrational, wenn sie nicht rational ist. Zeigen Sie, dass zwischen zwei verschiedenen irrationalen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt.

Wichtige Hinweise: Notieren Sie Ihre Lösungen bitte leserlich, tackern Sie Ihre Abgabe zusammen, und vergessen Sie nicht Ihre Namen und Matrikelnummern auf der ersten Seite zu vermerken. Die Abgabe soll in 3er Gruppen erfolgen.

Beweisen Sie stets alle Ihre Behauptungen detailliert!

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 03.11.2010, 10 Uhr**, in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.