Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1.

a) Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen α das eventuell uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha\, dx$ existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

b) Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen α das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha\, dx$ existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

c) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } x \in (-n, n), \\ 0 & \text{für } x \notin (-n, n). \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert f dieser Funktionenfolge.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge auch gleichmäßig gegen f konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass für jedes n das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx$ existiert und bestimmen Sie seinen Wert.

d) Untersuchen Sie, ob die Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration in diesem Fall zulässig ist, also ob folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Punkten.

a) $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ in $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$

b) $f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ in $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$

c) $f_3(x) = e^{2x}$ in $x_0 = 1$

d) $f_4(x) = \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind für die Klausur relevant! Studieren Sie die Aufgaben sorgfältig und besprechen Sie Probleme in den Übungen und Tutorien.