Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$r(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{für } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},\ \operatorname{ggT}(n,m) = 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Funktionen $p_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1).$$

Berechnen Sie die sechs Integrale $\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)\,dx$ für $i, j = 0, 1, 2$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen.

a)
$$f_1 : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

b)
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \cos^2 x$$

c)
$$f_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

d)
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie für f_4 die Substitution $x = \tan y$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Umkehrfunktion des Tangens $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_0^{\sqrt{\log 2}} \frac{x e^{(x^2)}\,dx}{\cos^2(1 - e^{(x^2)})}, \qquad \int_0^{\pi/2} (x+1)(x-1)\sin x\,dx$$

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind für die Zulassung zur Klausur nicht mehr relevant, **wohl aber für die Klausur selbst!** Sie sollten diese Aufgaben daher unbedingt bearbeiten und bis **Mittwoch, den 26.01.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 einwerfen. Dann kann Ihre Abgabe noch in den letzten Übungen vor der Klausur besprochen werden.