Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1.

a) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a,b). Zeigen Sie, dass dann $f \geq g$ auf $[a,b]$ gilt.

b) Beweisen Sie als Anwendung:

$$1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1 \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 2.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) := 0$ und

$$f(x) := x\big(1 + 2x\sin(1/x)\big)$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie: f ist überall differenzierbar, es gilt $f'(0) > 0$, aber jede Umgebung von 0 enthält Intervalle, in denen f streng monoton fällt.

b) Untersuchen Sie die Frage, ob f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\log(x+1)}, \qquad \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{x}, \qquad \lim_{x\searrow 0} x^x$$

Aufgabe 4. Gegeben seien ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall $[a,b]$ und zwei Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall auch beschränkt sind.

1. Zeigen Sie, dass für die Oberintegrale die folgende Beziehung gilt.

$$\int_a^{b*} (f+g)(x)\,dx \leq \int_a^{b*} f(x)\,dx + \int_a^{b*} g(x)\,dx$$

2. Geben Sie zwei auf einem beschränktem Intervall $[a,b]$ beschränkte Funktionen an, so dass die folgende echte Ungleichung gilt.

$$\int_a^{b*} (f+g)(x)\,dx < \int_a^{b*} f(x)\,dx + \int_a^{b*} g(x)\,dx$$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 19.01.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.