Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion und die Ableitung ihrer Umkehrfunktion.

c) Gegeben sei die Funktion $h : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \log\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion.

Aufgabe 2.

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to (c,d)$. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn f injektiv ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.

b) Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f injektiv.

c) Wenn f auf (a,b) streng monoton steigend ist, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.

d) Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f auf (a,b) streng monoton steigend.

Aufgabe 3.

Gegeben seien eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$ und die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\alpha e^{-x}$. Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = \alpha$ ein strenges lokales und globales Maximum hat.

Aufgabe 4.

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ und $f(x) = x(2 - \sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$ für $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f im Punkt 0 stetig und für $x > 0$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie alle Punkte $x > 0$ in denen $f'(x) = 0$ ist, und berechnen Sie in diesen Punkten die Funktionswerte. Ist f auch im Punkt 0 differenzierbar?

Bitte wenden.

Aufgabe 5.

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Weiter seien $f_1 := f$ und induktiv $f_n := f \circ f_{n-1}$ für alle $n > 1$.

a) Bestimmen Sie die Ableitungen aller Funktionen f_k.

b) Bestimmen Sie den Wert der Ableitungen an der Stelle a, wenn a ein Fixpunkt von f ist, also $f(a) = a$ gilt.

Aufgabe 6.

Gegeben seien ein Intervall (a, b) und zwei Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, die beide auf (a, b) zweimal differenzierbar sind. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn f und g konvex sind, dann ist auch $f + g$ konvex.

b) Wenn f und g konvex sind, dann ist auch $f \cdot g$ konvex.

c) Wenn f und g konvex sind, und die Verknüpfung $f \circ g$ möglich ist, dann ist auch $f \circ g$ konvex.

d) Wenn f streng monoton steigend ist und g konvex ist, und die Verknüpfung $f \circ g$ möglich ist, dann ist auch $f \circ g$ konvex.

e) Wenn f streng monoton steigend und konvex ist und g konvex sind, und die Verknüpfung $f \circ g$ möglich ist, dann ist auch $f \circ g$ konvex.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 12.01.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.

Wegen der langen Weihnachtsferien diesmal ausnahmsweise sechs Aufgaben, das gibt Ihnen die Möglichkeit, Ihren Punktestand aufzubessern. Die volle Punktzahl erreichen Sie mit vier vollständig gelösten Aufgaben, alles weitere ergibt einen Bonus.

Wir wünschen Ihnen ein schönes Fest und einen guten Start ins neue Jahr!