Für die folgenden Mengen ist zu zeigen, dass sie die Überdeckungseigenschaft nicht erfüllen :

$A := [0, \infty)$, $B := [0, 1)$, $C := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

Wir konstruieren also jeweils eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

—

zu A:

$\Big((-1, n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Überdeckung von A, denn :

$$\begin{aligned}
&(-1, n) \subset (-1, n+1) \text{ und } \lim_{n\to\infty} n = \infty \\
&\Rightarrow \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-1, n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1, n) = (-1, \infty) \supset [0, \infty) = A
\end{aligned}$$

Angenommen $\exists M \subset \mathbb{N}$ endlich mit $\bigcup_{n\in M}(-1, n) \supset A$
Da M endlich ist, $\exists n_0 := max(M) \in M$
$\Rightarrow \bigcup_{n\in M}(-1, n) = (-1, n_0)$
Es ist aber $(n_0 + 1) \in A$ und $(n_0 + 1) \notin (-1, n_0)$ ↯
$\Rightarrow$ A erfüllt die Überdeckungseigenschaft nicht.

zu B:

$\Big(\left(-1, 1 - \frac{1}{n}\right)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Überdeckung von B, denn :

$$\begin{aligned}
&\left(-1, 1 - \tfrac{1}{n}\right) \subset \left(-1, 1 - \tfrac{1}{n+1}\right) \text{ und } \lim_{n\to\infty} 1 - \tfrac{1}{n} = 1 \\
&\Rightarrow \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, 1 - \tfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-1, 1 - \tfrac{1}{n}\right) = (-1, 1) \supset [0, 1) = B
\end{aligned}$$

Angenommen $\exists M \subset \mathbb{N}$ endlich mit $\bigcup_{n\in M} \left(-1, 1 - \frac{1}{n}\right) \supset B$
Da M endlich ist, $\exists n_0 := max(M) \in M$
$\Rightarrow \bigcup_{n\in M} \left(-1, 1 - \frac{1}{n}\right) = \left(-1, 1 - \frac{1}{n_0}\right)$
Es ist aber $\left(1 - \frac{1}{n_0+1}\right) \in B$ und $\left(1 - \frac{1}{n_0+1}\right) \notin \left(-1, 1 - \frac{1}{n_0}\right)$ ↯
$\Rightarrow$ B erfüllt die Überdeckungseigenschaft nicht.

zu C:

$\left(\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}, 2\right)_{m\in\mathbb{N}}\right)$ ist eine Überdeckung von C, denn:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}\right) \subset \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n+1}\right) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Rightarrow \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{n}\right) = \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) =: U_1
\end{aligned}$$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}, 2\right) \subset \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m+1}, 2\right)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}, 2\right) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}, 2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right) =: U_2$

und es gilt $U_1 \cup U_2 \supset C, da \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$
Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist disjunkt, also ist auch
$C = (C \cap U_1) \cup (C \cap U_2)$ disjunkt.
Wenn es zu $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung zu $C \cap U_1$ gibt, so gibt es auch keine Teilüberdeckung zu C.

Angenommen $\exists M \subset \mathbb{N}$ endlich mit $\bigcup_{n\in M} \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}\right) \supset (C \cap U_1)$
Da M endlich ist, $\exists n_0 := max(M) \in M$
$\Rightarrow \bigcup_{n\in M} \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}\right) = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n_0}\right)$
Es sind $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n_0}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in (U_1 - \mathbb{Q})$
$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \cap U_1$ mit : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n_0}\right) < q < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt)
Somit ist q $\in \mathbb{Q} \cap U_1 = C \cap U_1$ und q $\notin \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n_0}\right)$ ↯
$\Rightarrow$ C erfüllt die Überdeckungseigenschaft nicht.