BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2011/2012
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Hartmut Pecher — Abgabe: 25.01.2012 10 Uhr

Aufgabe 1 Seien $a, b \geq 0$ mit $a^2 = b$. Der Differentialgleichung $y'' + 2ay' + by = 0$ $(*)$ entspricht ein lineares System $y' = P(x)y$ $(**)$.

1. Bestimmen Sie $P(x)$.
2. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1(x) = e^{-ax}$ und $f_2(x) = xe^{-ax}$ Lösungen von $(*)$ sind.
3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ von $(**)$. Verifizieren Sie, dass die zugehörige Wronski-Determinante die Differentialgleichung

   $$z' = z \cdot \operatorname{Spur}(P(x))$$

   löst (für eine $n \times n$-Matrix A ist $\operatorname{Spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

Aufgabe 2 Seien $f_i \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und seien y_i Lösungen von

$$y_i'' + f_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante des Systems $\{y_1, y_2\}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$W(x) = \int_{x_0}^{x} (f_2(t) - f_1(t)) y_1(t) y_2(t) \, dt + const.$$

Aufgabe 3 Seien $y_1, \ldots, y_m \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ m-mal stetig differenzierbare Funktionen so dass $W(y_1, \ldots, y_m) \neq 0$ in (a, b). Dann gibt es eine lineare Differentialgleichung

$$p_0(x) y^{(m)} + p_1(x) y^{(m-1)} + \cdots p_m(x) y = 0 \quad (*)$$

mit $p_0(x) \neq 0$ in (a, b), so dass $\{y_1, \ldots, y_m\}$ ein Fundamentalsystem von $(*)$ ist.

Hinweis: Betrachte

$$L[y] := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_m & y \\ y_1' & \cdots & y_m' & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(m)} & \cdots & y_m^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie unter Verwendung der angegebenen Lösung $y^{(1)}$ des zugehörigen homogenen Systems alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \frac{1}{x} y_2 + (1-2x) \\ y_2' &= y_1 + \frac{2}{x} y_2 - x \end{aligned} \quad , \qquad y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit Hilfe des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens.