

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zu Analysis II WS 2011/2012  
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Hartmut Pecher

Abgabe: 11.1.2012 10 Uhr

---

**Aufgabe 1** Seien  $r_E, v_0 > 0$ . Man bestimme eine Lösung in impliziter Form des Anfangswertproblems

$$y'' = -g \frac{M}{y^2} \quad , \quad y(0) = r_E, y'(0) = v_0.$$

Zeigen Sie: Für  $v_0^2 \geq \frac{2gM}{r_E}$  gilt  $y'(t) > 0 \forall t \geq 0$  und  $y(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ , während für  $v_0^2 < \frac{2gM}{r_E}$  gilt: es gibt ein minimales  $\infty > \bar{t} > 0$  mit  $y'(\bar{t}) = 0$ . Berechne  $\bar{t}$  (als bestimmtes Integral).

**Aufgabe 2** Seien  $g, l > 0$ . Bestimme eine Lösung in impliziter Form des Anfangswertproblems

$$\phi'' + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad , \quad \phi(0) = \phi_0, \phi'(0) = 0. \quad (0 < \phi_0 \leq \frac{\pi}{2})$$

Bestimme die Periode  $2\bar{t}$  der Bewegung, wobei  $\bar{t}$  das minimale  $t > 0$  ist mit  $\phi'(t) = 0$ . Was ergibt sich für die Approximation  $\sin \phi \approx \phi$ ?

**Aufgabe 3** Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(0) = 0$$

im Intervall  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$  eindeutig lösbar ist.

**Aufgabe 4** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x^2 + y - 1} \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Iteration nach Picard-Lindelöf.