BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2011/2012

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Hartmut Pecher — Abgabe: 30.11.2011 10 Uhr

Aufgabe 1 Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
2. f hat in $(0,0)$ ein lokales Minimum.
3. f ist nach unten unbeschränkt (und hat damit kein globales Minimum).

(*Hinweis*: Verwenden Sie den Ansatz $f(x,y) = x^2 + \lambda(x)y^2$.)

Aufgabe 2 Betrachten Sie die kubische Gleichung

$$0 = X^3 - b_1X^2 + b_2X - b_3 = (X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)\,,$$

wobei für das Koeffiziententripel $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ und das Lösungstripel $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ gelte: a_1, a_2 und a_3 sind paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Lösungstripel (x_1,x_2,x_3) aus einer Umgebung von (a_1,a_2,a_3) bijektiv und stetig differenzierbar von den Koeffiziententripeln (y_1,y_2,y_3) aus einer Umgebung von $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ abhängen. (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass gilt $(y_1,y_2,y_3) = f(x_1,x_2,x_3)$, indem Sie f explizit bestimmen, und dass für die Jacobideterminante gilt: $J_f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)$.)

Aufgabe 3 Beweisen Sie die Riemann-Integrierbarkeit der Funktion $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$, und berechnen Sie das Integral durch Rückgang auf die Definition.

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, $R := [1,2]\times[3,4]$.
2. $\int_R \frac{y\,dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $R := [0,1]\times[0,1]$. (*Hinweis*: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a}.)$)