BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2011/2012

Übungsblatt 4

Prof. Dr. Hartmut Pecher — Abgabe: 16.11.2011 10 Uhr

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Handelt es sich um globale Extremstellen?

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) = x/|x|^2$. (*Hinweis*: Verwenden Sie die Identität $\det(AA^T) = (\det A)^2$ für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.)

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass $\varphi\colon A \to B$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, indem Sie die Umkehrabbildung explizit berechnen.

1. $A = \mathbb{R}^n$, $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ und $\varphi(x) := \frac{x}{1+|x|}$.

2. $A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^n : 1/2 < |y|^2 < 1\}$ und $\varphi(x) := \frac{|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}}{|x|+1} \frac{x}{|x|}$.

Aufgabe 4 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1,x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

1. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in sich umkehrbar?

2. Finden Sie eine affine Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1,-1)$ approximiert.