BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2011/2012

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Hartmut Pecher Abgabe: 09.11.2011 10 Uhr

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := 3x^2 + 9y^2 + 24z^2 - x^3 - 2y^3 - 4z^3$.

Aufgabe 2 Für eine k-mal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ heißt

$$T_k f(x;a) := \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^m f \right)(a)$$

das Taylorpolynom der Ordnung k von f im Entwicklungspunkt $a \in \Omega$. Für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \mapsto e^{y_1} \sin y_2$$

berechne man das Taylorpolynom dritter Ordnung um $a = (0,0)$

1. durch Berechung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in a,
2. unter Verwendung der Exponential- bzw. Sinus-Reihe, in der man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

Aufgabe 3 a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto xy^3 + z^2 - 2y^2 z$$

im Punkt $(1,1,2)$ in die Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & : \quad xy \neq 0 \\ 0 & : \quad xy = 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren, obwohl f dort nicht stetig ist.

Aufgabe 4 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, daß f im Nullpunkt stetig und partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.