BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2011/2012

Übungsblatt 2

Prof. Dr. Hartmut Pecher — Abgabe: 02.11.2011 10 Uhr

Aufgabe 1 Bestimmen Sie, welche der nachfolgenden Mengen offen bzw. abgeschlossen sind:

1. $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < 2r\},\ r > 0$
2. $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{m+1}} < |x| < \frac{1}{2^m}\}$
3. $M_3 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ oder } x_1 = 1\}$
4. $M_4 := \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq 1\},\ y \in \mathbb{R}^n$ fest

Aufgabe 2 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie: Für jedes feste y_0 ist die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ stetig. Ebenso ist für jedes feste x_0 die Funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ stetig. Die Funktion f hingegen ist im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ unstetig.

Aufgabe 3 Für $n \geq 3$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto |x|^\alpha.$$

Berechnen Sie ferner $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ und bestimmen Sie denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

Aufgabe 4 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Man zeige, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist, daß aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Ist f im Nullpunkt stetig?