Musterlösung

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Analysis II Nachklausur WS 2011/2012

Prof. Dr. Hartmut Pecher 14.03.2012, 09:15 Uhr

Name	Matr.Nr.	Studienfach	Fachsemester

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	6	6	4	4	4	6	30	

Wichtige Hinweise:

1. Tragen Sie in die obigen Felder Name, Vorname, Matrikelnummer, Studienfach und Fachsemester ein.
2. Außer Schreibwerkzeug sind keinerlei weitere Hilfsmittel zugelassen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte aus 6 Aufgaben bestehen.
4. Notieren Sie Ihre Lösungen und Lösungswege jeweils unterhalb der Aufgabe bzw. auf der folgenden Seite. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung.
5. Bitte schreiben Sie in Ihrem eigenen Interesse leserlich und geben Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an!
6. Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit Rot.
7. Lösen sie nicht die Klammerung der Klausur.
8. **DIE KLAUSUR IST MIT 15 PUNKTEN BESTANDEN !!**

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. (6 Punkte)
a) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := e^{xy}\sin(x^2+y)$ und den Vektor $\xi := (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0, \frac{\pi}{2})$.

b) Betrachten Sie die Funktion $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \log(x+y^2)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt $(1,0)$.

---

a) Es ist $\nabla f(x,y) = \big((y\sin(x^2+y)+2x\cos(x^2+y))e^{xy}, (x\sin(x^2+y)+\cos(x^2+y))e^{xy}\big)$, also $\nabla f(0,\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Da f total differenzierbar ist folgt $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,\frac{\pi}{2}) = \nabla f(0,\frac{\pi}{2})\cdot\xi = (\frac{\pi}{2},0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$.

b) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}.$$

Also ist $\nabla f(1,0) = (1,0)$ und $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{aligned} T_2\big((x,y);(1,0)\big) &= f(1,0) + \nabla f(1,0)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y)\cdot H_f(1,0)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+y^2 = -\frac{3}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2+y^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (6 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)^2 e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existieren und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ sind.

c) Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ kein Extremum besitzt und dass in $(x,y) = (0,0)$ ein Minimum vorliegt.

---

a) Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4 e^{-1/h^2}}{h} = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4 e^{-1/h^2}}{h} = 0$$

also ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$ mit verschwindenden partiellen Ableitungen.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[4x(x^2+y^2) + 2x\right] e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left[4y(x^2+y^2) + 2y\right] e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[4x(x^2+y^2) + 2x\right] e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[4y(x^2+y^2) + 2y\right] e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \end{aligned}$$

d.h. die partiellen Ableitungen sind stetig in $(0,0)$. Die Stetigkeit in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist klar.

c) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ falls $x \neq 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ falls $y \neq 0$, d.h. $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ falls $(x,y) \neq (0,0)$. Also hat f keine kritischen Punkte und damit keine Extremstellen in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Da für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $f(x,y) > 0 = f(0,0)$, ist $(0,0)$ ein Minimum von f.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x+y$, auf dem Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

Es ist $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ auf $\{x^2+y^2=1\}$, also ist die Multiplikatorenregel von Lagrange anwendbar. Der Ansatz $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x \\ 1 &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Quadrieren und anschließendes addieren der Gleichungen liefert unter Verwendung der Nebenbedinung $x^2+y^2=1$, dass $2 = 4\lambda^2(x^2+y^2) = 4\lambda^2$, d.h. $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Einsetzen in das Gleichungssystem liefert die möglichen Extremstellen $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ und $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Es bleibt zu überprüfen ob tatsächlich Extremstellen vorliegen. Da f stetig und $\{x^2+y^2=1\}$ kompakt ist, nimmt f sowohl ein Minimum als auch ein Maximum unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$ an. Da $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ und $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, folgt dass $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ das einzige Minimum und $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ das einzige Maximum von f auf $\{x^2+y^2=1\}$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$I := \int_B (x^2 + y^2) \cos[\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)^2] \, dxdy \, .$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten ergibt sich

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos[\frac{\pi}{2} r^4] r \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 r^3 \cos[\frac{\pi}{2} r^4] \, dr = \sin[\frac{\pi}{2} r^4]_{r=0}^1 = 1.$$

Aufgabe 5. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = x^3 y^2, \;\; y(0) = -y_0.$$

für jedes $y_0 \geq 0$ genau eine Lösung $y = y(x)$ besitzt, die für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert. Bestimmen Sie diese!

EXISTENZ. Ist $y_0 = 0$ so ist $y \equiv 0$ eine triviale Lösung des obigen AWP. Falls $y_0 \neq 0$ so können wir annehmen, dass y nullstellenfrei ist und es folgt

$$\begin{aligned}
& y'(x) = x^3 y^2(x) \\
\Rightarrow \quad & \frac{y'(x)}{y^2(x)} = x^3 \\
\Rightarrow \quad & \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y^2(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} t^3\, dt \\
\Rightarrow \quad & -\frac{1}{y(x)} = \frac{x^4}{4} + C \\
\Rightarrow \quad & y(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + C}.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $y(0) = -y_0$ liefert $C = \frac{1}{y_0}$, also lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + \frac{1}{y_0}}.$$

EINDEUTIGKEIT. Da $|x^3(y_1 + y_2)|$ aus Stetigkeitsgründen auf der kompakten Menge $\{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-N, N],\, y_1, y_2 \in [y_0 - N, y_0 + N]\}$ durch eine Konstante $K_N > 0$ nach oben beschränkt ist, erfüllt die rechte Seite der obigen DGL wegen

$$|x^3 y_1^2 - x^3 y_2^2| = |x^3(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| \leq K_N |y_1 - y_2|$$

auf jedem Rechteck $[-N, N] \times [y_0 - N, y_0 + N]$ eine Lipschitzbedingung in y. Da hier $N > 0$ beliebig ist liefert der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Eindeutigkeit der Lösungen.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 3x^2 y,\ y(0) = 1$$

a) durch Separation der Variablen,

b) mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens.

---

a) Wegen $y(0) = 1 \neq 0$ können wir annehmen, dass y nullstellfrei ist. Man rechnet

$$\begin{aligned}
& y'(x) = 3x^2 y(x) \\
\Rightarrow\quad & \frac{y'(x)}{y(x)} = 3x^2 \\
\Rightarrow\quad & \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} 3t^2\,dt \\
\Rightarrow\quad & \log|y(x)| = x^3 + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow\quad & |y(x)| = C_2 e^{x^3} \qquad (C_2 \in (0,\infty)) \\
\overset{e^{x^3}\neq 0}{\Rightarrow}\quad & y(x) = C_3 e^{x^3} \qquad (C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).
\end{aligned}$$

Die Bedinung $y(0) = 1$ liefert $C_3 = 1$, d.h. die gesuchte Lösung lautet $y(x) = e^{x^3}$.

b) Die ersten Picard-Lindelöf-Iterierten lauten

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x) &\equiv 1, \\
y^{(1)}(x) &= 1 + \int_0^x 3t^2\,dt = 1 + x^3 = 1 + \frac{x^3}{1!}, \\
y^{(2)}(x) &= 1 + \int_0^x (3t^2 + 3t^5)\,dt = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{(x^3)^2}{2!}.
\end{aligned}$$

Damit errät man den allgemeinen Ansatz

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x^3)^j}{j!}.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)}(x) &= 1 + \int_0^x 3t^2 \sum_{j=0}^{k} \frac{(t^3)^j}{j!}\,dt = 1 + \sum_{j=0}^{k} \int_0^x 3\,\frac{t^{3j+2}}{j!} = 1 + \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{3(j+1)}}{(j+1)!} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(x^3)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x^3)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung des AWP $y(x) = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(x) = e^{x^3}$.