Musterlösung

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Analysis II Klausur WS 2011/2012

Prof. Dr. Hartmut Pecher 03.02.2012, 09:15 Uhr

Name	Matr.Nr.	Studienfach	Fachsemester

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	4	6	6	4	4	6	30	

Wichtige Hinweise:

1. Tragen Sie in die obigen Felder Name, Vorname, Matrikelnummer, Studienfach und Fachsemester ein.
2. Außer Schreibwerkzeug sind keinerlei weitere Hilfsmittel zugelassen.
3. Kontrollieren Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit: Sie sollte aus 6 Aufgaben bestehen.
4. Notieren Sie Ihre Lösungen und Lösungswege jeweils unterhalb der Aufgabe bzw. auf der folgenden Seite. Sollte der Platz nicht ausreichen, so stellt die Klausuraufsicht zusätzliches Papier zur Verfügung.
5. Bitte schreiben Sie in Ihrem eigenen Interesse leserlich und geben Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an!
6. Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht mit Rot.
7. Lösen sie nicht die Klammerung der Klausur.
8. **DIE KLAUSUR IST MIT 15 PUNKTEN BESTANDEN !!**

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe 1. (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existieren und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass f total differenzierbar in $(0,0)$ ist.

---

a) Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

also ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$ mit verschwindenen partiellen Ableitungen.

b) Falls f in $(0,0)$ total differenzierbar ist, muss sein Differenzial also durch die Matrix $Df(0,0) = (0,0)$ beschrieben werden. Da

$$\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - (0,0)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{h_1^3h_2^3}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_1^2}\right)^{3/2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0,$$

ist f total differenzierbar in $(0,0)$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$.

a) Zeigen Sie, dass f kein Extremum auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ jeweils ein Maximum und ein Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

---

a) Es ist $\nabla f(x,y) = (y,x)$, also $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Es ist aber $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det H_f(0,0) = -1$ und damit $(0,0)$ ein Sattelpunkt. Also nimmt f keine Extremstellen in $\{x^2 + y^2 < 1\}$ an.

b) Es ist $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ auf $\{x^2 + y^2 = 1\}$, also ist die Multiplikatorenregel von Lagrange anwendbar. Der Ansatz $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x \\ x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Es treten zwei Fälle auf:

1. Fall: $x \neq y$. Dann ist $(y - x) = 2\lambda(x - y) \Rightarrow \lambda = -1/2 \wedge x = -y$. Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ liefert $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow (x,y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \vee (x,y) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

2. Fall: $x = y$. Dann ist $\lambda = 1/2$. Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ liefert $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2} \Rightarrow (x,y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \vee (x,y) = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Es bleibt zu überprüfen ob tatsächlich Extremstellen vorliegen. Da f stetig und $\{x^2 + y^2 = 1\}$ kompakt ist, nimmt f sowohl ein Minimum als auch ein Maximum unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 1$ an. Da $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -1/2$ und $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$, sind die Punkte aus Fall 1 die einzigen Minima und die Punkte aus Fall 2 die einzigen Maxima.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
a) Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, und überprüfen Sie, ob f global invertierbar ist.
b) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $\quad y + 1 - xy - \cos y = 0 \quad$ in der Nähe des Punktes $a = (0,0)$ in der Form $y = g(x)$ auflösen lässt und berechnen Sie $g'(0)$.

---

a) Es ist $\det Df(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, also ist f nach dem Umkehrsatz in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar. Da z.B. $f(0,0) = f(0,2\pi)$, ist f nicht injektiv, also nicht global invertierbar.

b) Für $f(x,y) := y + 1 - xy - \cos y$ ist $\nabla f(x,y) = (-y, 1 - x + \sin y)$. Insbesondere ist $(\partial f/\partial y)(0,0) = 1 \neq 0$, d.h. die Gleichung $f = 0$ lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nahe $(0,0)$ in der Form $y = g(x)$ auflösen, und es ist $g'(0) = -[(\partial f/\partial y)(0,0)]^{-1} \cdot (\partial f/\partial x)(0,0) = -1 \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$I := \int_B |y| e^{(x^2+y^2)^{3/2}} \, dxdy \, .$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie separat die Teile für $y > 0$ und $y < 0$.)

Schreibe $B^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0\}$. Dann ist mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
I &= 2 \int_{B^+} y e^{(x^2+y^2)^{3/2}} \, dxdy = 2 \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \, e^{r^3} \, d\varphi dr \\
&= \int_0^1 2r^2 \, e^{r^3} [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\pi} \, dr = \int_0^1 4r^2 \, e^{r^3} \, dr = [\frac{4}{3} e^{r^3}]_{r=0}^1 \\
&= \frac{4}{3}(e-1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = e^{-y}, \; y(0) = 0.$$

Für welche x existiert die Lösung?

Es gilt

$$\begin{aligned} & y'(x) = e^{-y(x)} \\ \Rightarrow \quad & y' e^{y(x)} = 1 \\ \Rightarrow \quad & \int_{x_0}^{x} y'(t) e^{y(t)} \, dt = \int_{x_0}^{x} 1 \, dt \\ \Rightarrow \quad & e^{y(x)} = x + C \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \ln(x + C). \end{aligned}$$

Die Bedingung $y(0) = 0$ liefert $C = 1$, also lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = \ln(x + 1).$$

Die Lösung existiert für $x \in (-1, \infty)$.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2y - 2,\ y(0) = 2$$

a) mit Hilfe des Lösungsverfahrens für lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung,

b) mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens. (*Hinweis*: Vergleichen Sie die ersten Picard-Iterierten mit den ersten Termen der Exponentialreihe.)

---

a) (I) Allgemeine Lösung der homogenen DGL. Ist y nullstellenfrei so rechnet man

$$\begin{aligned}
& y'(x) = 2y(x) \\
\Rightarrow\quad & \frac{y'(x)}{y(x)} = 2 \\
\Rightarrow\quad & \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} 2\,dt \\
\Rightarrow\quad & \log|y(x)| = 2x + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow\quad & |y(x)| = C_2 e^{2x} \qquad (C_2 \in (0,\infty)) \\
\overset{e^{2x}\neq 0}{\Rightarrow}\quad & y(x) = C_3 e^{2x} \qquad (C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der trivialen Lösung $y \equiv 0$ ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen DGL zu $y(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(II) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Einsetzen des Ansatzes $y(x) = C(x)e^{2x}$ in die inhomogene DGL liefert

$$\begin{aligned}
& y'(x) = 2y(x) - 2 \\
\Rightarrow\quad & C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} - 2 \\
\Rightarrow\quad & C'(x) = -2e^{-2x} \\
\Rightarrow\quad & C(x) = e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Also ist $y_p(x) = e^{-2x}e^{2x} \equiv 1$ eine Lösung der inhomogenen DGL.

(III) Lösen des AWP. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet $y(x) = 1 + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ liefert $C = 1$, also lautet die gesuchte Lösung $y(x) = 1 + e^{2x}$.

b) Die ersten Picard-Lindelöf-Iterierten lauten

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x) &\equiv 2 = 1 + 1 \\
y^{(1)}(x) &= 2 + \int_0^x 2\,dt = 2 + 2x = 1 + \left(1 + \frac{2x}{1!}\right) \\
y^{(2)}(x) &= 2 + \int_0^x (2 + 4t), dt = 2 + 2x + 2x^2 = 1 + \left(1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!}\right).
\end{aligned}$$

Damit errät man den allgemeinen Ansatz

$$y^{(k)}(x) = 1 + \sum_{j=0}^{k} \frac{(2x)^j}{j!}.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}(x) &= 2 + \int_0^x 2 \sum_{j=0}^{k} \frac{(2t)^j}{j!}\,dt = 2 + \sum_{j=0}^{k} \frac{(2x)^{j+1}}{(j+1)!} = 2 + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(2x)^j}{j!} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(2x)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung des AWP $y(x) = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(x) = 1 + e^{2x}$.