5. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 22.11.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Funktionsfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} z^j$, $D = \mathbb{C}$,

(b) $f_n(z) = \tan(nz)$, $D = \mathbb{H}$,

(c) $f_n(z) = n\left(\frac{\pi}{z}\right)^n$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Entscheiden Sie für jede der Folgen und für jeden Punkt $z_0 \in D$, ob $(f_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und ob es ein Gebiet $G \subset D$ mit $z_0 \in G$ gibt, sodass $f_n|_G$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Bestimmen Sie in diesem Fall das größtmögliche Gebiet G um z_0 mit dieser Eigenschaft.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Man untersuche, ob die auf $\mathbb{D}$ definierten Funktionsfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(z) = nz$ und $g_n(z) = z + n$, kompakt gegen den Rand von $\mathbb{C}$ konvergieren.

(b) Folgern Sie mithilfe des Satzes von Grauert-Reckziegel und (a), dass auf $\mathbb{C}$ keine stark negativ gekrümmte Metrik existiert, die vollständig ist.

(c) Finden Sie eine Folge holomorpher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$, die kompakt gegen den Rand von $\mathbb{D}$ konvergiert.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Familie $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(G) \mid f(G) \cap U = \emptyset\}$ normal ist.
Hinweis: Für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ und ein fest gewähltes $w \in U$ betrachte man die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n(z) = (f_n(z) - w)^{-1}$, und argumentiere mit dem Satz von Montel.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon G \to \mathbb{C}$, die punktweise gegen eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen Äquivalent sind:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f.

(ii) f ist stetig und für jeden Punkt $z_0 \in G$ und jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z_0)$.