

Analysis 1

Übungsblatt 11

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 7. Juli 2014

1. [2 Punkte] Finden und bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (-2 + 4(x - 1)^2) \cdot \exp(-x^2)$$

Skizzieren Sie aufgrund der so gewonnenen Informationen die Funktion.

2. [2 Punkte] Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, gegeben durch $f_\alpha(x) = x^\alpha$

- (a) streng konkav?
- (b) streng konvex?
- (c) konvex und konkav?
- (d) weder konvex noch konkav?

3. [3 Punkte]

- (a) Sei $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine konkave Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass f *subadditiv* ist, d.h. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \geq 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass so eine Funktion auf \mathbb{R}_0^+ gleichmäßig stetig ist.
- (c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, welche auf $(0, \infty)$ differenzierbar und auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist und für welche gilt: $\lim_{x \downarrow 0} g'(x) = \infty$.

4. [3 Punkte] Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x) - 2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x^3)}$$

Abgabe: jeweils **Montags bis 12 Uhr** in die Postfächer der zuständigen Übungsgruppenleiter.