Analysis 1

Übungsblatt 9

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 23. Juni 2014

1. [1 Punkt] Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $a \in [0,1]$ mit $f(a) = a$.

Hinweis: Betrachten Sie $f(x) - x$.

2. [3 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

(a) $f_1\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 1/(x^2 - 1)$

(b) $f_2\colon (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = [x] := \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

(c) $f_3\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 1, \\ x^2 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$

3. [2 Punkte] Gegeben sei eine positive reelle Zahl $a > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp_a(x) := \exp(x \cdot \log a)$ ist stetig.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp_a(n) = a^n$.

(d) Für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$.

4. [2 Punkte] Gegeben seien ein $k \in \mathbb{N}$ und eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}, \qquad \lim_{x\downarrow 0} x^k e^{1/x}, \qquad \lim_{x\downarrow 0} x^\alpha, \qquad \lim_{x\downarrow 0} x^{-\alpha},$$

5. [2 Punkte]

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere Intervalle und sei $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ jeweils auf A und auf B gleichmäßig stetig. Zudem gelte entweder $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ oder $A \cup B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass f dann auch auf $A \cup B$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Ist die Quadratwurzel $\sqrt{}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ gleichmäßig stetig?

*Abgabe: jeweils **Montags bis 12 Uhr** in die Postfächer der zuständigen Übungsgruppenleiter.*

Bitte melden Sie sich auf WUSEL für die Klausur an!