Analysis 1 Übungsblatt 6

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 26. Mai 2014

---

1. [3 Punkte]

(a) [2 Punkte] Sei $(a_n)_n$ eine nicht-negative, monoton fallende Folge. Beweisen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} k^n \cdot a_{k^n}$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, konvergiert.

(b) Für welche $p \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot (\log(\log(n)))^p}$?

Mit $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *bezeichnen wir die Umkehrfunktion von* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, *es gilt also* $\log(k^n) = n\log(k)$.

2. [3 Punkte] Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Supremum und das Infimum. Stellen Sie fest, ob das Supremum und das Infimum zur angegebenen Menge gehören oder nicht.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| < 1\}$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} - 1 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$

(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{n}\right| < \frac{2}{n}\right\}$

3. [2 Punkte]

(a) Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit $\limsup_{n\to\infty} a_n =: a < \infty$ und $\limsup_{n\to\infty} b_n =: b < \infty$. Beweisen Sie, dass dann immer die folgende Beziehung gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}\ a_n + \limsup_{n\to\infty}\ b_n$$

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier solcher Folgen, bei welchem in obiger Ungleichung keine Gleichheit herrscht.

4. [2 Punkte]

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge und $a := \sup(M)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(a_n)_n$ von Elementen von M mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Sei $(f_n)_n$ eine beschränkte, $(g_n)_n$ eine positive konvergente Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(f_n g_n) = \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right)$$

*Abgabe: jeweils **Montags bis 12 Uhr** in die Postfächer der zuständigen Übungsgruppenleiter.*