Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal
24.03.2011

2. Klausur Analysis I (WS 2010/2011)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1. (2+4 Punkte)
Stellen Sie für die folgenden Reihen fest, ob sie konvergent sind.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot(n+3)^6}{6\cdot 5^{n+4}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)$

Aufgabe 2. (9+3+5 Punkte)
Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben als $f(x) := \begin{cases} x^5+x^3 & \text{für } x\le 0,\\ x^4\sin(1/x) & \text{für } x>0.\end{cases}$

a) Wie oft ist f differenzierbar bzw. stetig differenzierbar?

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $g(x) := \sin x$ im Punkt 0 und berechnen Sie den Konvergenzradius.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x) := x^{-5}(\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3)$ unendlich oft differenzierbar ist.

Aufgabe 3. (4+8+3 Punkte)

a) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare bijektive Funktion mit $f'(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und f^{-1} die differenzierbare Umkehrfunktion. Geben Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion in Abhängigkeit von f' an. Leiten Sie diese Formel aus $f^{-1}(f(x)) = x$ her.

b) Zeigen Sie, dass $\tan : (-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ bijektiv ist und dass für die Umkehrfunktion $\arctan:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$ gilt: $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

c) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

Aufgabe 4. (4+8 Punkte)

a) Untersuchen Sie, für welche Werte von $s\in\mathbb{R}$ das Integral $\int_0^1 x^s dx$ und für welche Werte von $s\in\mathbb{R}$ das Integral $\int_1^{\infty} x^s dx$ existieren.

b) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu $f(x) := \log x$ und $g(x) := \frac{\log x}{x}$.

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte	6	17	15	12	50
erreicht					

Note: **1.Prüfer:** **2.Prüfer:**