Mögliche Themen für die Abschlussarbeit im Master Mathematik

1. **Parabolische Mannigfaltigkeiten** (*Betreuer: Prof. Dr. J. Ruppenthal*)
   Eine nicht-kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *parabolisch*, falls jede beschränkte subharmonische Funktion auf M konstant ist. Ein Beispiel hierfür ist etwa die Gaußsche Zahlebene $\mathbb{C}$, wohingegen $\mathbb{C}^n$ für $n \geq 2$ nicht parabolisch ist. Aus dem Beweis des Uniformierungssatzes für Riemannsche Flächen ist bekannt, dass eine nicht-kompakte Mannigfaltigkeit genau dann parabolisch ist, wenn sie keine Greenschen Funktionen, d.h. Fundamentallösungen des Laplace-Operators, besitzt. Tatsächlich gibt es aber noch eine ganze Reihe weiterer sehr spannender hinreichender und oder notwendiger Bedingungen für Parabolizität, und zwar beispielsweise unter Verwendung von Ausschöpfungsfunktionen, Stokes' Theorem, der Greenschen Formel, isoperimetrischer Ungleichungen, Brownscher Bewegung, stochastischer Vollständigkeit, etc... In der Masterarbeit sollen möglichst viele Charakterisierungen besprochen und verglichen werden und evtl. neue Beispiele parabolischer Mannigfaltigkeiten gesucht werden.

2. **Die $\overline{\partial}$-Gleichung auf der A_1-Singularität** (*Betreuer: Prof. Dr. J. Ruppenthal*)
   Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, meist formuliert unter Verwendung des $\overline{\partial}$-Operators, spielen eine zentrale Rolle in der Komplexen Analysis. Nach dem Lemma von Dolbeault ist die $\overline{\partial}$-Gleichung auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M lokal lösbar. Das hat viele wichtige Konsequenzen, beispielsweise ergibt sich daraus folgender spannender Zusammenhang zwischen Geometrie und Analysis auf komplexen Mannigfaltigkeiten:

   $$H^q(M, \Omega^p) \;\cong\; H^{p,q}(M).$$

   Hierbei bezeichnet $H^q(M, \Omega^p)$ die q-te Kohomologiegruppe der Garbe der Keime holomorpher p-Formen Ω^p, und $H^{p,q}(M)$ die $\overline{\partial}$-Kohomologie, d.h. die Quotientengruppe $\overline{\partial}$-geschlossener Differentialformen modulo $\overline{\partial}$-exakter Differentialformen.

   Ist M nun aber keine Mannigfaltigkeit mehr, sondern eine anlytische Varietät mit Singularitäten, z.B. die A_1-Singularität $A_1 = \{z^2 = xy\} \subset \mathbb{C}^3$, so gilt das Lemma von Dolbeault nicht mehr, d.h. die $\overline{\partial}$-Gleichung ist nicht mehr lokal lösbar und es ist eine sehr spannende Aufgabe, die Kohomologiegruppen $H^{p,q}(A_1)$ zu bestimmen. In der Masterarbeit sollen alle bisherige Ergebnisse zu den Kohomologiegruppen $H^{p,q}(A_1)$ dargestellt werden. Darüber hinaus soll die bisher unbekannte Gruppe $H^{1,1}(A_1)$ bestimmt werden.